Translation of *Angle bisectors in a quadrilateral* : A. Ramchandran From Azim Premji University At Right Angles_March, 2015

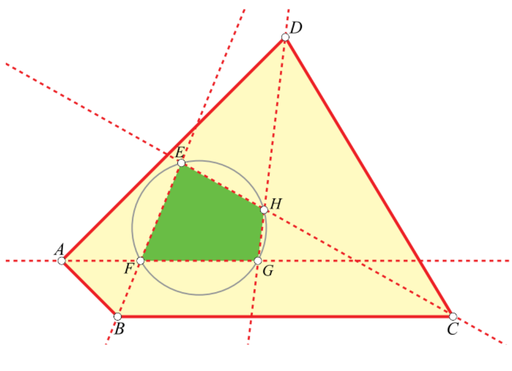
चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक

ए. रामचन्द्रन

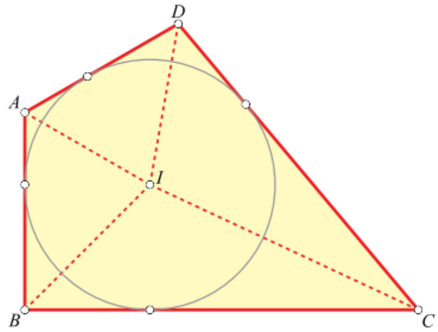
मुख्य शब्द : चतुर्भुज, विकर्ण, कोण-समद्विभाजक, स्पर्शरेखीय चतुर्भुज, पतंग, समचतुर्भुज, वर्ग, समद्विबाहु समलम्ब, ग़ैर-समद्विबाहु समलम्ब, चक्रीय, अन्तःवृत्त

किसी चतुर्भुज के अन्त:कोणों के सभी समद्विभाजक या तो संगामी (एकबिन्दुगामी) होते हैं या चक्रीय चतुर्भुज बनाने की किसी भी परिस्थिति में वे जोड़ियों में 4, 5 या 6 बिन्दुओं पर मिलते हैं। ठीक तीन समद्विभाजक संगामी हों, ऐसी स्थिति सम्भव नहीं है। एक सम्भावित परिस्थिति के लिए **चित्र-1** देखें। पाठकों को इन्हें और साथ ही नीचे उल्लिखित कुछ विशेष प्रकरणों के अवलोकनों को साबित करने के लिए आमंत्रित किया जाता है।

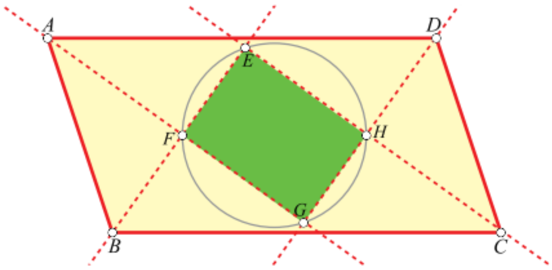
आख़िरी अवलोकन से प्रारम्भ करें। मान लें कि एक चतुर्भुज के तीन कोण समद्विभाजक संगामी हैं। संगामी बिन्दु को चौथे शीर्ष से जोड़ें। सिद्ध कीजिए कि यह रेखा चौथे शीर्ष के कोण को वास्तव में समद्विभाजित करती है। एक सामान्य बनावट जो दिखाती है कि एक चक्रीय चतुर्भुज *EFGH* कैसे बनता है।



चित्र-1 : एक सामान्य बनावट जो दिखाती है कि एक चक्रीय चतुर्भुज कैसे बनता है।

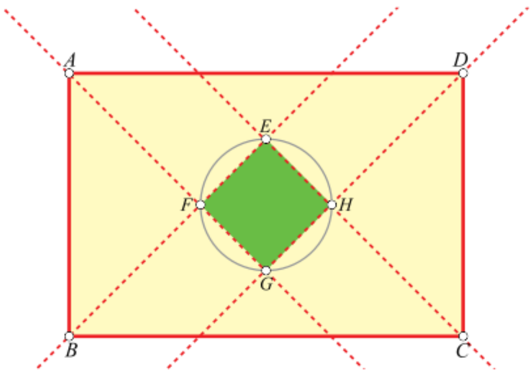


चित्र-2 : स्पर्शरेखीय चतुर्भुज

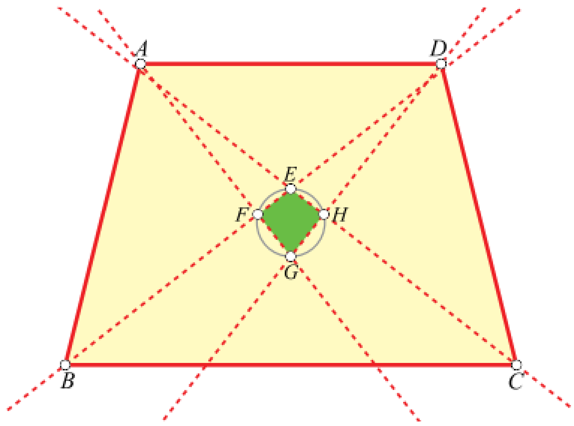


चित्र-3 : यदि *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है, तब *EFGH* एक आयत होगा।

जिस चतुर्भुज के चारों कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं, स्पर्शरेखीय चतुर्भुज कहलाता है। ऐसे चतुर्भुज में चारों भुजाओं को स्पर्श करते हुए एक वृत्त होता है। यह वृत्त चतुर्भुज का अन्त:वृत्त और इसका केन्द्र चतुर्भुज का अन्त:केन्द्र कहलाता है (**चित्र-2** देखें)। सिद्ध कीजिए कि ऐसे किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयों का योग बराबर होता है (अर्थात, **चित्र-2** में, $AB + CD = AD + BC$)। इसका उलट भी सिद्ध कीजिए : यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की लम्बाइयों का योग बराबर हो, तो चतुर्भुज स्पर्शरेखीय चतुर्भुज होता है।



चित्र-4 : यदि *ABCD* एक आयत है, तब *EFGH* एक वर्ग होगा।



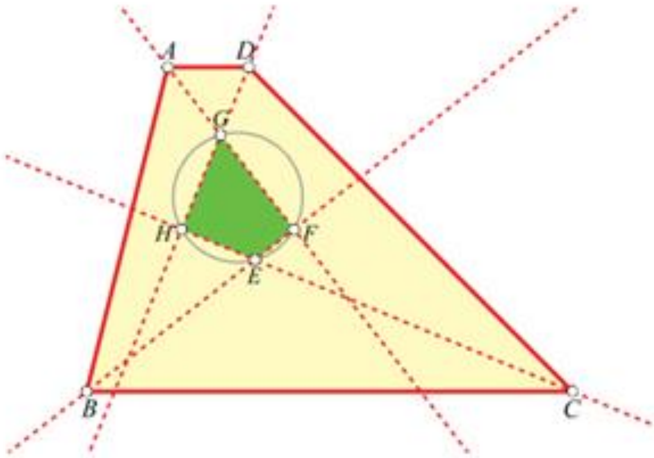
चित्र-5 : यदि *ABCD* एक समद्विबाहु समलम्ब है जिसकी सम्मुख भुजाओं कि लम्बाइयों का योग बराबर नहीं है, तब *EFGH* एक पतंग होगा।

पतंग (kite) और समचतुर्भुज (जिसमें वर्ग भी शामिल है) स्पर्शरेखीय चतुर्भुज के विशेष उदाहरण हैं। पतंग में एक विकर्ण उसके द्वारा जोड़े जाने वाले शीर्षों पर बने कोणों को समद्विभाजित करता है जबकि एक समचतुर्भुज में यह दोनों विकर्णों के लिए सही होता है।

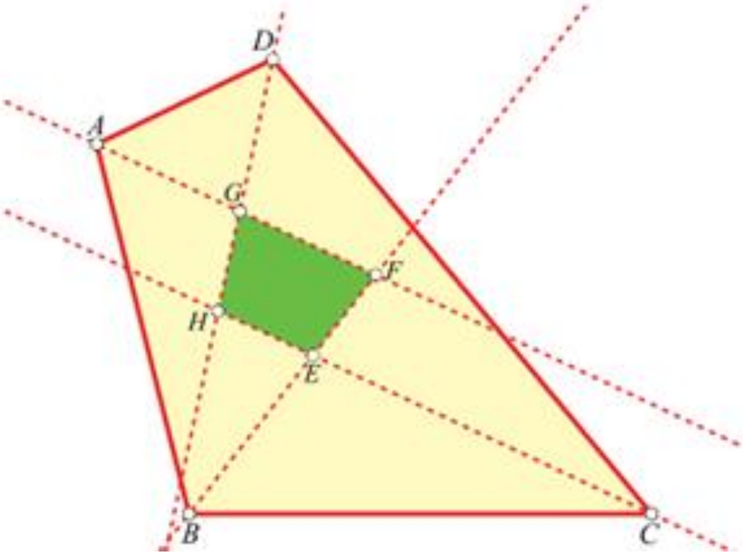
जब कोणों के समद्विभाजक युग्मों के रूप में मिलते हैं, तो वे एक चतुर्भुज बनाते हैं। सिद्ध कीजिए कि यह चतुर्भुज चक्रीय है। साथ में यह भी सिद्ध कीजिए कि :

1. किसी सामान्य समान्तर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं (**चित्र-3 देखें**)।
2. किसी सामान्य आयत के कोणों के समद्विभाजक एक वर्ग बनाते हैं (**चित्र-4** देखें)।
3. किसी समद्विबाहु समलम्ब (विपरीत भुजाओं का योग ग़ैर-बराबर) में कोणों के समद्विभाजक एक चक्रीय पतंग (जिसे 'सम पतंग' भी कहते हैं) बनाते हैं, जहाँ बराबर कोण समकोण होते हैं (**चित्र-5** देखें)।
4. **चित्र-6** में एक ग़ैर-समद्विबाहु समलम्ब दर्शाया गया है। इस स्थिति में हमें एक ऐसा चतुर्भुज मिलता है जिसके एक जोड़ी सम्मुख कोण समकोण होते हैं।
5. एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख कोणों का केवल एक युग्म बराबर होता है (सम्मुख भुजाओं का योग ग़ैर-बराबर), ऐसे चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक समलम्ब चतुर्भुज बनाते हैं। (**चित्र-7** देखें।)

टिप्पणी : इस सर्वेक्षण से हम पाते हैं कि किसी चतुर्भुज के चार कोणों के आन्तरिक समद्विभाजक खींचने पर आकृतियों का ख़ज़ाना मिलता है। हम यहाँ किए गए दावों को सिद्ध करने के लिए पाठकों को आमंत्रित करते हैं।



चित्र-6 : जब *ABCD* एक ग़ैर-समद्विबाहु समलम्ब है, तब *EFGH* एक चक्रीय चतुर्भुज होगा। जिसमें $\angle F = \angle H = 90°$ है।



चित्र-7 : जब *ABCD* में $\angle B = \angle D$ परन्तु $\angle A \neq \angle C$, तब *EFGH* एक समद्विबाहु समलम्ब होगा ($FG \parallel EH$ और $EF = HG$)

ए रामचन्द्रन की गणित व विज्ञान सिखाने में काफ़ी समय से रुचि रही है। उन्होंने स्नातक स्तर पर भौतिक शास्त्र व गणित की पढ़ाई की और फिर स्नातकोत्तर स्तर पर वे जीवविज्ञान की ओर बढ़ गए। उन्होंने दो दशक से अधिक समय तक ऋषि वैली स्कूल में मिडिल स्कूल के विद्यार्थियों को विज्ञान, गणित तथा भूगोल पढ़ाया। वे चेन्नई में रहते हैं। उनकी अन्य रुचियों में अँग्रेज़ी भाषा और भारतीय संगीत शामिल हैं। उनसे archandran.53@gmail.com सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : संजय गुलाटी **अनुवाद पुनरीक्षण** : सुशील जोशी
कॉपी-एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन)
सम्पादन : राजेश उत्साही